Математика 2курс

1. Дата проведения занятия: 9.09.20

2. Номер пары: 1

3. Группа: 21а

4. Тема занятия: **Предел, непрерывность и разрыв функции**

5. Задание: написать конспект (вспомнить основные понятия и теоремы, способы вычисления пределов, непрерывности и точек разрыва функций)

**Определение предела функции**

Постоянное число *а* называется *пределом* *последовательности*{xn}, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε > 0 существует номер N, что все значения *xn*, у которых n>N, удовлетворяют неравенству

|xn - a| < ε.

Записывают это следующим образом: https://www.mathelp.spb.ru/book1/lim.files/image002.gif или xn→ a.

Вычисление предела функции.

**Любой предел состоит из трех частей**:

1) Всем известного значка предела http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image004.gif.  
2) Записи под значком предела, в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image006.gif. Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008.gif, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image010.gif).  
3) Функции под знаком предела, в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image012.gif.

Сама запись http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image002_0000.gif читается так: «предел функции http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image012_0000.gif при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?  
Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image016.gif, затем http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image018.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image020.gif, …, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image022.gif, ….  
То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image024.gif

Готово.

Итак, первое правило:**Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

**Пределы с неопределенностью вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098.gif и метод их решения**

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда **http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0003.gif**, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пример:1

Вычислить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image100.gif

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0000.gif. Можно было бы подумать, что http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image102.gif, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

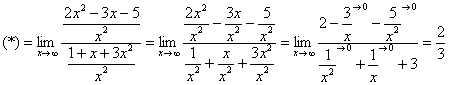
Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0002.gif в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image105.jpg  
Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0003.gif в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image107.jpg  
Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0001.gif необходимо разделить числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0004.gif в старшей степени**.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image109.gif  
Разделим числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image111.gif  


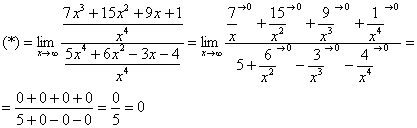
Вот оно как, ответ http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image115.gif, а вовсе не бесконечность.

Пример 2

Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image121.gif  
Снова в числителе и знаменателе находим http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0005.gif в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image124.jpg  
Максимальная степень в числителе: 3  
Максимальная степень в знаменателе: 4  
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.  
Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image126.gif делим числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image128.gif.  
Полное оформление задания может выглядеть так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image130.gif

Разделим числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image128.gif

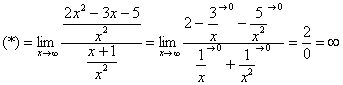


Пример 3

Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image136.gif  
Максимальная степень «икса» в числителе: 2  
Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0006.gif можно записать как http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image139.gif)  
Для раскрытия неопределенности http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image126_0000.gif необходимо разделить числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image141.gif. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image143.gif

Разделим числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image141_0000.gif



Под записью http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image148.gif подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0002.gif у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

**Пределы с неопределенностью вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image150.gif и метод их решения**

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4

Решить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image152.gif  
Сначала попробуем подставить -1 в дробь:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image154.gif   
В данном случае получена так называемая неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image156.gif.

**Общее правило**: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image156_0000.gif, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения

Итак, решаем наш предел  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image158.gif

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image160.gif  
Сначала находим дискриминант:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image162.gif  
И квадратный корень из него: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image164.gif.

В случае если дискриминант большой, например 361,  используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

*! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.*

Далее находим корни:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image166.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image168.gif

Таким образом:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image170.gif

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image172.gif уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image174.gif

Очевидно, что можно сократить на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image176.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image178.gif

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image180.gif

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image158_0000.gif

Разложим числитель на множители.  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image160_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image162_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image164_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image166_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image168_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image183.gif

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image185.gif

Пример 5

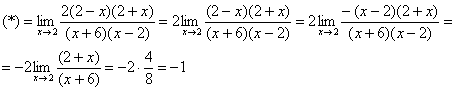
Вычислить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image187.gif

Сначала «чистовой» вариант решения

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image189.gif

Разложим числитель и знаменатель на множители.

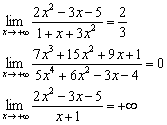
Числитель: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image191.gif  
Знаменатель:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image193.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image195.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image197.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image199.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image201.gif  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image203.gif



Что важного в данном примере?  
Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

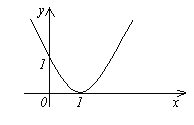
Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.**  
**Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела**.  
*В ходе решения фрагмент типа http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image207.gif встречается очень часто. Сокращать такую дробь****нельзя****. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*  
*http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image209.gif, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Практикум «Проверь себя»  


**Бесконечно малые и бесконечно большие функции.**

Функция *y=f(x)* называется *бесконечно малой* при *x→a* или при *x*→∞, если https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image002.gif или https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image004.gif, т.е. бесконечно малая функция – это функция, предел которой в данной точке равен нулю.



*Функция http://www.matica.narod.ru/Lekcii/Img9/lk9_1.6.gif называется бесконечно большой величиной при http://www.matica.narod.ru/Lekcii/Img9/lk9_1.7.gif ,*

, т.е. бесконечно большая функция – это функция, предел которой в данной точке равен бесконечности.

http://mathemlib.ru/mathenc/item/f00/s00/e0000444/pic/435_01.jpg

**Пример 6**

1. Функция *f(x)*=(*x*-1)2 является бесконечно малой при *x*→1, так как https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image008.gif (см. рис.).
2. Функция *f(x)* = tg*x* – бесконечно малая при *x*→0.
3. *f(x)* = ln (1+*x*)– бесконечно малая при *x*→0.
4. *f(x)* = 1/*x*– бесконечно малая при *x*→∞.

**ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ**

**Теорема 1.** Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций, т.е.

https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image050.gif.

**Пример. https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image056.gif**

**Теорема 2.** Предел произведения двух, трех и вообще конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image058.gif.

**Теорема 3.** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля, т.е.

https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image071.gif.

Пример

https://toehelp.ru/theory/math_new/lecture02/l02image079.gif

**Исследование функции на непрерывность**

Определение

Функция *f*(*x*), определенная в некоторой окрестности точки *a*, называется *непрерывной в точке* *a*, если  
lim*x*→*af*(*x*)=*f*(*a*)

**Определение непрерывности функции через предел. Функция является непрерывной в точке https://function-x.ru/chapter6-4/c001.gif при соблюдении трёх условий:**

1. Функция определена в точке https://function-x.ru/chapter6-4/c001.gif.

2. Существует [предел функции](https://function-x.ru/lim1.html) в точке https://function-x.ru/chapter6-4/c001.gif, при этом правый и левый пределы равны: https://function-x.ru/chapter6-4/c002.gif. Правый и левый пределы вычисляются как [предел](https://function-x.ru/lim1.html) вообще: в выражение функции вместо икса подставляется то, к чему стремится икс, причём вместе с плюс нулём при правом пределе и с минус нулём при левом пределе.

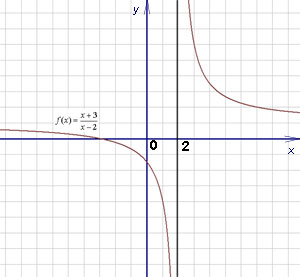
3. Предел функции в точке https://function-x.ru/chapter6-4/c001.gif равен значению функции в этой точке: https://function-x.ru/chapter6-4/c003.gif

4. Построить эскиз графика функции.

**Вычисление точки разрыва функции.**

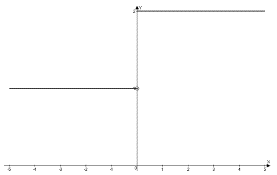
Если в точке  функция  не является непрерывной, то эта точка называется **точкой разрыва функции**.

Точки на графике, которые не соединены между собой, называются ***точками разрыва функции***. График такой функции, терпящей разрыв в точке x=2 - https://function-x.ru/chapter6-4/division.gif - на рисунке ниже.

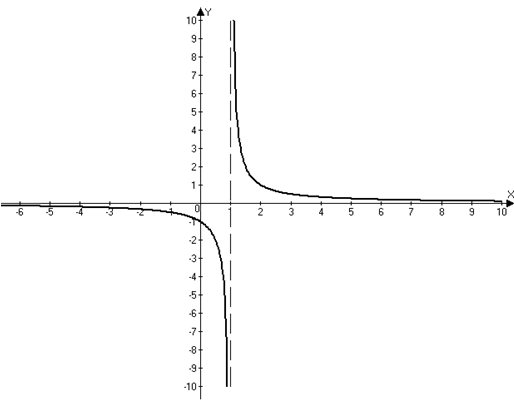


***Разрывы бывают первого рода и второго рода***.

Точка  называется **точкой разрыва первого рода** функции , если в этой точке односторонние пределы конечны и не равны между собой



Точка  называется **точкой разрыва второго рода** функции, если в этой точке, по крайней мере, один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует



**Пример .7**Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки

разрыва для функции https://function-x.ru/chapter6-4/c051.gif

Решение. Очевидно, что в точке https://function-x.ru/chapter6-4/c052.gif функция не определена. Найдём левый и правый пределы функции в этой точке:

https://function-x.ru/chapter6-4/c053.gif,

https://function-x.ru/chapter6-4/c054.gif.

Оба предела бесконечны, поэтому точка https://function-x.ru/chapter6-4/c052.gif - точка разрыва второго рода.

**Пример .8**Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки разрыва для функции https://function-x.ru/chapter6-4/c109.gif

Решение. Функция не определена в точке https://function-x.ru/chapter6-4/c110.gif. Найдём левый и правый пределы функции в этой точке:

https://function-x.ru/chapter6-4/c111.gif,

https://function-x.ru/chapter6-4/c112.gif.

Оба предела бесконечны, поэтому точка https://function-x.ru/chapter6-4/c110.gif - точка разрыва второго рода.

6. Ссылки на электронно-образовательный ресурс (ролик, конспект, литературу - автор и название учебника, сайт, персональный сайт и т.п.)

Литература: лекция

7. Для отчетности студента:

адрес электронной почты: [gelyusa.galimova@mail.ru](mailto:gelyusa.galimova@mail.ru)

срок сдачи: отправлять конспект не надо, записываем его в одну рабочую тетрадь, позже будет практическая работа по теме.