Математика 2курс

1. Дата проведения занятия: 8.09.20

 2. Номер пары: 3

 3. Группа: 21м

 4. Тема занятия: **Предел, непрерывность и разрыв функции**

 5. Задание: написать конспект (вспомнить основные понятия и теоремы, способы вычисления пределов, непрерывности и точек разрыва функций)

**Определение предела функции**

Постоянное число *а* называется *пределом* *последовательности*{xn}, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε > 0 существует номер N, что все значения *xn*, у которых n>N, удовлетворяют неравенству

|xn - a| < ε.

Записывают это следующим образом:  или xn→ a.

Вычисление предела функции.

**Любой предел состоит из трех частей**:

1) Всем известного значка предела .
2) Записи под значком предела, в данном случае . Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно , хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность ().
3) Функции под знаком предела, в данном случае .

Сама запись  читается так: «предел функции  при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?
Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала , затем , , …, , ….
То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:



Готово.

Итак, первое правило:**Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

**Пределы с неопределенностью вида  и метод их решения**

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда ****, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пример:1

Вычислить предел 

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида . Можно было бы подумать, что , и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим  в старшей степени:

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим  в старшей степени:

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность  необходимо разделить числитель и знаменатель на  в старшей степени**.


Разделим числитель и знаменатель на 


Вот оно как, ответ , а вовсе не бесконечность.

Пример 2

Найти предел 
Снова в числителе и знаменателе находим  в старшей степени:

Максимальная степень в числителе: 3
Максимальная степень в знаменателе: 4
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.
Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности  делим числитель и знаменатель на .
Полное оформление задания может выглядеть так:



Разделим числитель и знаменатель на 



Пример 3

Найти предел 
Максимальная степень «икса» в числителе: 2
Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 ( можно записать как )
Для раскрытия неопределенности  необходимо разделить числитель и знаменатель на . Чистовой вариант решения может выглядеть так:



Разделим числитель и знаменатель на 



Под записью  подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида  у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

**Пределы с неопределенностью вида  и метод их решения**

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4

Решить предел 
Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

В данном случае получена так называемая неопределенность .

**Общее правило**: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида , то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения

Итак, решаем наш предел


Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

Сначала находим дискриминант:

И квадратный корень из него: .

В случае если дискриминант большой, например 361,  используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

*! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.*

Далее находим корни:



Таким образом:


Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель  уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.



Очевидно, что можно сократить на :



Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:



Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:



Разложим числитель на множители.









Пример 5

Вычислить предел 

Сначала «чистовой» вариант решения



Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: 
Знаменатель:



, 




Что важного в данном примере?
Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.**
**Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела**.
*В ходе решения фрагмент типа  встречается очень часто. Сокращать такую дробь****нельзя****. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*
*, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Практикум «Проверь себя»


**Бесконечно малые и бесконечно большие функции.**

Функция *y=f(x)* называется *бесконечно малой* при *x→a* или при *x*→∞, если  или , т.е. бесконечно малая функция – это функция, предел которой в данной точке равен нулю.



*Функция  называется бесконечно большой величиной при  ,*

, т.е. бесконечно большая функция – это функция, предел которой в данной точке равен бесконечности.



**Пример 6**

1. Функция *f(x)*=(*x*-1)2 является бесконечно малой при *x*→1, так как  (см. рис.).
2. Функция *f(x)* = tg*x* – бесконечно малая при *x*→0.
3. *f(x)* = ln (1+*x*)– бесконечно малая при *x*→0.
4. *f(x)* = 1/*x*– бесконечно малая при *x*→∞.

**ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ**

**Теорема 1.** Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций, т.е.

.

**Пример. **

**Теорема 2.** Предел произведения двух, трех и вообще конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

.

**Теорема 3.** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля, т.е.

.

Пример



**Исследование функции на непрерывность**

Определение

Функция *f*(*x*), определенная в некоторой окрестности точки *a*, называется *непрерывной в точке* *a*, если
lim*x*→*af*(*x*)=*f*(*a*)

**Определение непрерывности функции через предел. Функция является непрерывной в точке  при соблюдении трёх условий:**

1. Функция определена в точке .

2. Существует [предел функции](https://function-x.ru/lim1.html) в точке , при этом правый и левый пределы равны: . Правый и левый пределы вычисляются как [предел](https://function-x.ru/lim1.html) вообще: в выражение функции вместо икса подставляется то, к чему стремится икс, причём вместе с плюс нулём при правом пределе и с минус нулём при левом пределе.

3. Предел функции в точке  равен значению функции в этой точке: 

4. Построить эскиз графика функции.

**Вычисление точки разрыва функции.**

Если в точке  функция  не является непрерывной, то эта точка называется **точкой разрыва функции**.

Точки на графике, которые не соединены между собой, называются ***точками разрыва функции***. График такой функции, терпящей разрыв в точке x=2 -  - на рисунке ниже.



***Разрывы бывают первого рода и второго рода***.

Точка  называется **точкой разрыва первого рода** функции , если в этой точке односторонние пределы конечны и не равны между собой



Точка  называется **точкой разрыва второго рода** функции, если в этой точке, по крайней мере, один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует



**Пример .7**Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки

разрыва для функции 

Решение. Очевидно, что в точке  функция не определена. Найдём левый и правый пределы функции в этой точке:

,

.

Оба предела бесконечны, поэтому точка  - точка разрыва второго рода.

**Пример .8**Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки разрыва для функции 

Решение. Функция не определена в точке . Найдём левый и правый пределы функции в этой точке:

,

.

Оба предела бесконечны, поэтому точка  - точка разрыва второго рода.

6. Ссылки на электронно-образовательный ресурс (ролик, конспект, литературу - автор и название учебника, сайт, персональный сайт и т.п.)

Литература: лекция

7. Для отчетности студента:

адрес электронной почты: gelyusa.galimova@mail.ru

срок сдачи: отправлять конспект не надо, записываем его в одну рабочую тетрадь, позже будет практическая работа по теме.