1.3. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИКИ

Статическая характеристика элемента (системы) автоматики — это зависимость выходного сигнала y от входного x в установившемся (стационарном) режиме работы, т. е. $y = f(x)$. Статические характеристики могут быть представлены графически, аналитически или в виде таблиц.

Статические характеристики линейных элементов могут быть представлены уравнениями прямых $y = a \pm bx$, не проходящих через начало координат (рис. 1.6, *б*).

Большинство элементов и систем автоматики нелинейно. В качестве примера на рисунке 1.6, *в* показаны статические характеристики нелинейных элементов и систем автоматики, описываемых аналитическими выражениями $y = a + b/x$ (зависимость *1*) и $y = a + bx^2$ (зависимость *2*). На рисунке 1.6, *г* изображено семейство зависимостей $y = a + bx^2$ при изменяющемся параметре a от дополнительного сигнала, например Z.

Для всех перечисленных аналитических зависимостей a и b — постоянные коэффициенты, характеризующие соответственно начальное значение выходного сигнала и скорость его изменения в зависимости от входного сигнала.

Некоторые нелинейные элементы автоматики имеют неоднозначную статическую характеристику, т. е. одним и тем же

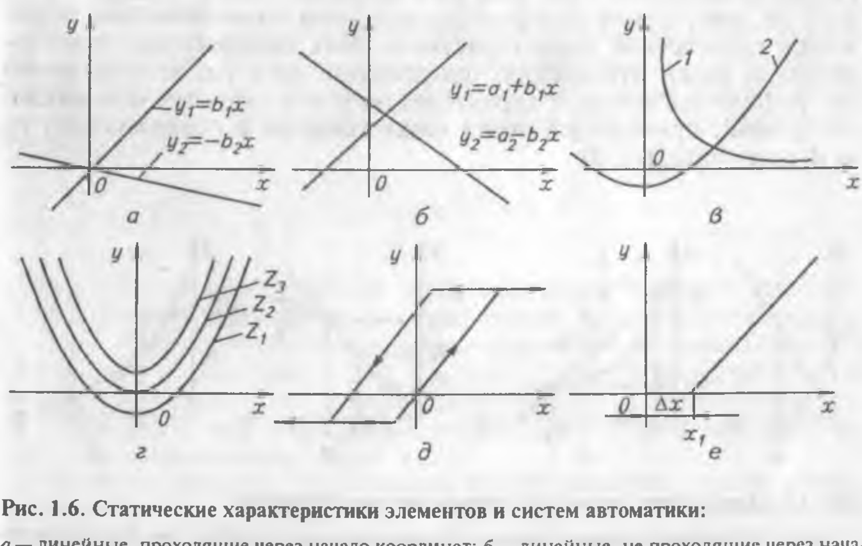

Рис. 1.6. Статические характеристики элементов и систем автоматики:

а — линейные, проходящие через начало координат; *б* — линейные, не проходящие через начало координат; *в* — нелинейные; *г* — семейство нелинейных характеристик; *д* — с гистерезисом; *е* — с порогом нечувствительности значениям x соответствуют различные значения y. В качестве примера на рисунке 1.6, *д* изображена характеристика такого элемента с гистерезисом. Изменение выходного сигнала $y = f(x)$ показано стрелками. Существуют также элементы автоматики с порогом нечувствительности x_1 (рис. 1.6, *е*), под которым подразумевается наименьшее значение входного параметра x, вызывающее изменение выходного сигнала. Диапазон изменения x от 0 до x_1 называют зоной нечувствительности.

Параметры статических характеристик элементов и систем автоматики — коэффициенты передачи (статический, динамический и относительный), номинальные значения и рабочие диапазоны изменения входного и выходного сигналов, погрешности измерения выходного сигнала.

Статический коэффициент передачи — это отношение выходной величины y к входной величине x. Он численно равен отношению их значений, например y_1 к x_1, или тангенсу угла наклона статической характеристики (рис. 1.7, *а*):

$$k_c = y_1/x_1 = \operatorname{tg}\alpha. \tag{1.4}$$

Статический коэффициент передачи имеет физический смысл только для линейных характеристик, проходящих через начало координат (см. рис. 1.6, *а*). Во всех остальных случаях используют динамический и относительный коэффициенты передачи.

Динамический коэффициент передачи — это отношение дифференциала выходного сигнала dy к дифференциалу входного сигнала dx, получаемое дифференцированием аналитического выражения статической характеристики. Этот коэффициент приблизительно равен отношению приращений Δy к Δx, определяемых по графику статической характеристики или тангенсу угла наклона прямой, проходящей через точки графика с координатами y_1, x_1 и y_2, x_2 (рис. 1.7, *б*):

Рис. 1.7. Определение параметров статических характеристик:

а — статического коэффициента передачи; *б* — динамического коэффициента передачи методом секущей; *в* — динамического и относительного коэффициентов передачи методом касательной; *г* — погрешности измерения (экспериментально)

$$k_д = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \beta. \qquad (1.5)$$

Единица измерения статического и динамического коэффициентов определяется отношением единиц измерения выходного и входного сигналов.

Относительный коэффициент передачи — это отношение выходной величины к входной, представленное в относительных единицах измерения (рис. 1.7, *в*),

$$y^* = \frac{dy}{y_н} \approx \frac{\Delta y}{y_н}; \quad x^* = \frac{dx}{x_н} \approx \frac{\Delta x}{x_н};$$

$$k^* = \frac{y^*}{x^*} = \frac{dyx_н}{dxy_н} \approx \frac{\Delta yx_н}{\Delta xy_н}, \qquad (1.6)$$

где $x_н$, $y_н$ — номинальные значения величин (параметров).

После расчетов в относительных единицах необходимо помнить, что абсолютные изменения входных и выходных параметров определяются соответственно по формулам $\Delta y = y^* y_н$ и $\Delta x = x^* x_н$. Передаточные коэффициенты могут быть положительными или отрицательными, т. е. их знак определяется ходом изменения статической характеристики (см. рис. 1.6, *а*, *б*).

Коэффициенты передачи в зависимости от вида элементов могут называться по-разному. Так, для усилителей, систем и объектов управления это коэффициент усиления; датчиков — коэффициент чувствительности; стабилизаторов — относительный коэффициент стабилизации, обратно пропорциональный относительному передаточному коэффициенту. Коэффициент стабилизации

$$S = \frac{1}{k^*} = \frac{\Delta yx_н}{\Delta xy_н}. \qquad (1.7)$$

Нелинейные статические характеристики подлежат линеаризации, которую осуществляют графически или аналитически.

При графической линеаризации нелинейную характеристику *1* заменяют на секущую *2* (рис. 1.7, *б*) или касательную *2* (рис. 1.7, *в*) к выбранной точке линеаризации (например, с параметрами $x_н$, $y_н$). При этом соответствующие коэффициенты передачи определяют по выражениям (1.5) и (1.6).

Если нелинейная статическая характеристика задана аналитически, то ее линеаризацию производят разложением в ряд Тейлора в окрестности выбранной точки, например с координатами $x_н$, $y_н$:

$$y = y_н + \left(\frac{dy}{dx}\right)_н \Delta x + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_н \frac{1}{2!}\Delta x^2 + ... + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_н \frac{1}{n!}\Delta x^n, \qquad (1.8)$$

где $\Delta x = x - x_н$ — приращение входной величины; $\Delta y = y - y_н$ — приращение выходной величины; $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_н$ — производная n-го порядка в точке линеаризации с координатами $x_н$, $y_н$.

Так как Δx — малая величина, то все приращения в уравнении более высокого порядка будут иметь и более высокий порядок малости, т. е. ими можно пренебречь. Тогда линеаризованное уравнение примет вид

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_н \Delta x = k\Delta x \text{ или } y = kx, \qquad (1.9)$$

где k — коэффициент передачи, равный первой производной dy/dx.

Уравнение (1.9) по отношению к уравнению (1.8) считают приближенным, так как в нем отсутствуют слагаемые высших порядков малости. В этом случае чем меньше отклонение переменных от их установившихся значений, тем меньше ошибка при замене нелинейного уравнения линейным.

При расчете и выборе элементов систем автоматики используют понятия их абсолютной, относительной и приведенной погрешностей.

Абсолютная погрешность элемента (системы) представляет собой отклонение полученного выходного параметра y_1 от его расчетного (номинального) значения $y_р$ (рис. 1.7, *г*)

$$\delta y = y_1 - y_р. \qquad (1.10)$$

Относительная погрешность — это отношение δy к значению выходного сигнала y_1, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\lambda = \delta y / y_1. \qquad (1.11)$$

Приведенная погрешность — это отношение δy к нормирующему (максимальному) значению y_N или диапазону изменения выходного сигнала Δy_N, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\gamma = \delta y / y_N, \quad \text{или} \quad \gamma = \delta y / \Delta y_N. \qquad (1.12)$$

Погрешности возникают из-за изменения внутренних свойств элементов (старение, износ, осевой зазор, трение и т. д.) и внешних условий (температура и влажность окружающей среды, отклонение параметров источника питания от номинальных значений и т. д.).

Практическое занятие 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕДАЧИ И ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ДАТЧИКА ТЕМПЕРАТУРЫ

Изобразить графически статическую характеристику $R_г = f(\theta)$ датчика температуры (термистора) *TE* (см. рис. 1.2, *в*) жидкого корма. Для этого плавно соединить нанесенные экспериментально полученные точки со следующими параметрами:

θ, °C	20	40	60	80	100
$R_т$, кОм	3,00	1,62	0,98	0,65	0,41

Здесь $R_г$, $R_т$ — значения сопротивлений датчика, заданные соответственно графически и таблично; θ — температура корма.

По зависимости $R_г = f(\theta)$ в диапазоне, заданном преподавателем каждому студенту индивидуально, определить все коэффициенты передачи, приняв в качестве номинальных средние значения диапазона. Обратить внимание на знаки и размерности коэффициентов передачи, выяснить, имеет ли физический смысл статический коэффициент передачи.

Используя две экспериментальные точки заданного диапазона, получить значения R_∞ и B аналитического выражения статической характеристики

$$R_а = R_\infty e^{\frac{B}{\theta + 273}}, \tag{1.13}$$

где R_∞ — сопротивление датчика при $\theta \to \infty$, кОм; B — коэффициент, характеризующий термочувствительность резистора, °C.

Для этого решить систему уравнений

$$\begin{cases} R_{т1} = R_\infty e^{\frac{B}{\theta_1 + 273}}; \\ R_{т2} = R_\infty e^{\frac{B}{\theta_2 + 273}}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Согласно полученной аналитической зависимости $R_а = f(\theta)$ в заданном диапазоне для номинальной точки найти динамический и относительный коэффициенты передачи и записать линеаризованное уравнение $\Delta R_а = k\Delta\theta$. Сравнить значения динамических и относительных коэффициентов передачи датчика температуры, полученные графически и аналитически.

Для заданного диапазона (трех его точек) определить погрешности измерения, приняв за расчетные значения сопротивления термистора, определенные графически $R_г$ и аналитически $R_а$. Сделать выводы.

1.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ АВТОМАТИКИ

Динамической характеристикой элемента (системы) автоматики считают зависимость $y(t) = F\ [x(t)]$, когда выходной $y(t)$ и входной $x(t)$ не только связаны между собой, но и зависят от времени. Динамические характеристики определяют для переходных (динамических) режимов работы элементов систем. Для описания этих режимов используют дифференциальные уравнения, передаточные функции, переходные (временные) и частотные характеристики.

Формы представления динамических характеристик. При определении динамических характеристик линейных элементов их параметры принимают независимыми от времени. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка — *дифференциальная форма*:

$$T\frac{dy}{dt}+y=kx, \qquad (1.15)$$

где T — постоянная времени, с; y, x — отклонения соответственно выходного и входного сигналов от их номинального значения; t — текущее значение времени, с; k — коэффициент передачи (усиления).

Следует отметить, что отклонения сигналов и коэффициент усиления могут иметь размерность (в этом случае k — динамический коэффициент передачи), а могут быть даны в относительных единицах. Параметры x и y зависимы от времени t, но в уравнениях типа (1.15) не принято писать $x(t)$, $y(t)$.

Дифференциальные уравнения могут быть представлены в *операторной (алгебраической) форме*, которая позволяет выполнять алгебраические операции. Переход от дифференциальной формы уравнения к алгебраической основан на прямом преобразовании Лапласа:

$$x(p)=\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt; \quad y(p)=\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt, \qquad (1.16)$$

где $x(p)$, $y(p)$ — изображения соответственно функций $x(t)$, $y(t)$; p — оператор Лапласа.

На практике переход от дифференциальной формы к операторной выполняют не по формулам (1.16), а формальной заменой операции дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на оператор p, операции интегрирования $\int dt$ на величину $\frac{1}{p}$, а функций $x(t)$, $y(t)$ на их изображения $x(p)$, $y(p)$.

Уравнение (1.15) в операторной (алгебраической) форме записи при нулевых начальных условиях имеет вид

$$Tpy(p) + y(p) = kx(p). \qquad (1.17)$$

В установившемся режиме работы производные дифференциальных уравнений равны нулю ($p = 0$). При этом уравнение (1.17) упрощается и соответствует линейному уравнению статической характеристики (1.9), т. е. ***статическая характеристика является частным случаем динамической характеристики.***

При оценке динамических свойств элементов (систем) используют передаточную функцию, получаемую в результате преобразования уравнения (1.17). Это отношение изображения выходной величины системы $y(p)$ к изображению входной величины $x(p)$ при начальных нулевых условиях:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{Tp+1}. \qquad (1.18)$$

Решив дифференциальное уравнение системы, определяют значение величины $y(t)$ в любой момент времени. Решения одного и того же уравнения будут разными, так как могут быть различные формы входного воздействия. Эти воздействия должны соответствовать наиболее тяжелому режиму работы системы при ее эксплуатации. В качестве такого воздействия может быть принята единичная ступенчатая функция $1(t)$.

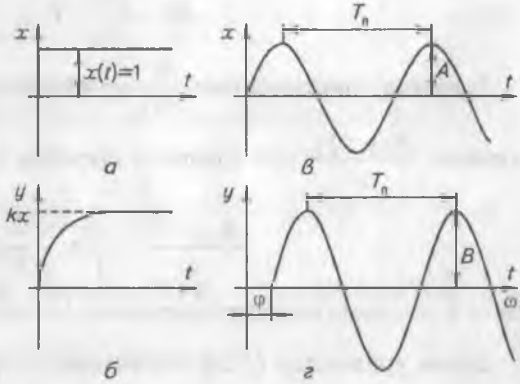

Рис. 1.8. Изменение выходной величины звена при типовых воздействиях на входе:

а — единичная ступенчатая функция $1(t)$; *б* — переходная функция апериодического звена первого порядка; *в* — гармоническое воздействие $x(t) = A\sin\omega t$; *г* — изменение выходного сигнала $y(t) = B\sin\omega t$; $T_п$ — период колебаний

Единичная ступенчатая функция описывает мгновенное включение (рис. 1.8, *а*) и отключение входного сигнала:

при включении

$$1(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0\\ 1 \text{ при } t\geq 0\end{cases}; \tag{1.19}$$

при выключении

$$1(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t<0\\ 0 \text{ при } t\geq 0\end{cases} \tag{1.20}$$

При использовании единичной ступенчатой функции решение дифференциального уравнения (1.15) называется переходной характеристикой и обозначается $h(t)$:

$$y=h(t)=k(1-e^{-t/T}). \tag{1.21}$$

Эта характеристика может быть представлена графически (рис. 1.8, *б*).

При ступенчатом не единичном входном воздействии на элемент (систему), т. е. при $x(t)\neq 1$, аналитическое решение его дифференциального уравнения (1.15) имеет вид

$$y=kx(1-e^{-t/T}). \tag{1.22}$$

С развитием вычислительной техники появилась возможность решения дифференциальных уравнений численными методами. Для этого дифференциальное уравнение должно быть записано в разностной форме. Уравнение (1.15) преобразуют следующим образом:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k}{T}x-\frac{1}{T}y. \tag{1.23}$$

Заменив производную $\frac{dy}{dt}$ приблизительно равным ей выражением $\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}$ для момента времени $t_{i+1}=t_i+\Delta t$, получают

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}=\frac{k}{T}x_i-\frac{1}{T}y_i, \tag{1.24}$$

где $i=0...n$ — число шагов интегрирования; Δt — шаг интегрирования во времени.

Затем уравнение (1.24) записывают *в разностной форме*

$$y_{i+1} = kx_i \frac{\Delta t}{T} + \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right) y_i \qquad (1.25)$$

и решают на ЭВМ, задавая входное воздействие $x_{i+1} = x_i$ при изменении времени $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Выражения типа (1.22) и (1.25), представленные графической зависимостью (рис. 1.8, *б*), называют *временной* или *разгонной характеристикой.*

Анализ динамических свойств элементов (систем) можно провести и по *частотным характеристикам.* Если на вход элемента (системы) подать синусоидальный сигнал с амплитудой A и круговой частотой ω (рис. 1.8, *в*)

$$x(t) = A \sin \omega t, \qquad (1.26)$$

то на его выходе получают синусоидальные колебания с амплитудой B, сдвинутые по фазе на угол φ (рис. 1.8, *г*),

$$y(t) = B \sin (\omega t - \varphi). \qquad (1.27)$$

Представляя синусоидальные колебания в виде векторов, получают амплитудно-фазочастотную характеристику (АФЧХ), равную отношению векторов выходной и входной величин при изменении круговой частоты $0 \le \omega \le \infty$:

$$W_{(j\omega)} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{B e^{j(\omega t - \varphi)}}{A e^{j\omega t}} = W(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}, \qquad (1.28)$$

где $W(\omega) = B/A$ — амплитудно-частотная характеристика; $j = \sqrt{-1}$ — мнимая часть комплексной переменной; $\varphi(\omega) = (\omega t - \varphi) - \omega t = -\varphi$ — фазочастотная характеристика.

АФЧХ элемента (системы) можно также получить, подставляя в уравнение (1.18) $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{k}{Tj\omega + 1}. \qquad (1.29)$$

Избавляясь от комплексной переменной в знаменателе умножением и делением выражения (1.29) на сопряженное число (1 – – $Tj\omega$), получаем

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = Re(\omega) + jIm(\omega), \qquad (1.30)$$

где $Re(\omega) = \dfrac{k}{1 + \omega^2 T^2}$ — проекция вектора $W(j\omega)$ на действительную ось; $Im(\omega) = \dfrac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$ — проекция вектора $W(j\omega)$ на мнимую ось.

На плоскости комплексные переменные изображают в виде годографа, который описывает вектор

$$W(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}, \tag{1.31}$$

поворачиваясь на угол

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \tag{1.32}$$

при изменении круговой частоты $0 \le \omega \le \infty$.

Годограф АФЧХ согласно выражению (1.30) изображен на рисунке 1.9. Для этого случая модуль вектора $W(j\omega)$ [см. выражение (1.31)] получен по формуле

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \tag{1.33}$$

а угол его поворота [см. формулу (1.32)]

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,(T\omega). \tag{1.34}$$

АЧХ и ФЧХ, определенные соответственно по выражениям (1.33) и (1.34), представлены на рисунке 1.10.

Кроме рассмотренных ранее форм представления динамических характеристик используют временные характеристики, полу-

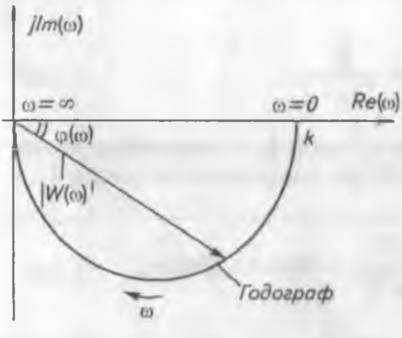

Рис. 1.9. Амплитудно-фазочастотная характеристика апериодического звена первого порядка

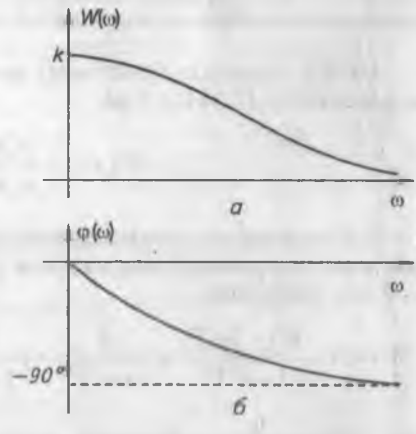

Рис. 1.10. Амплитудно- и фазочастотная характеристики апериодического звена первого порядка:

а — АЧХ; *б* — ФЧХ

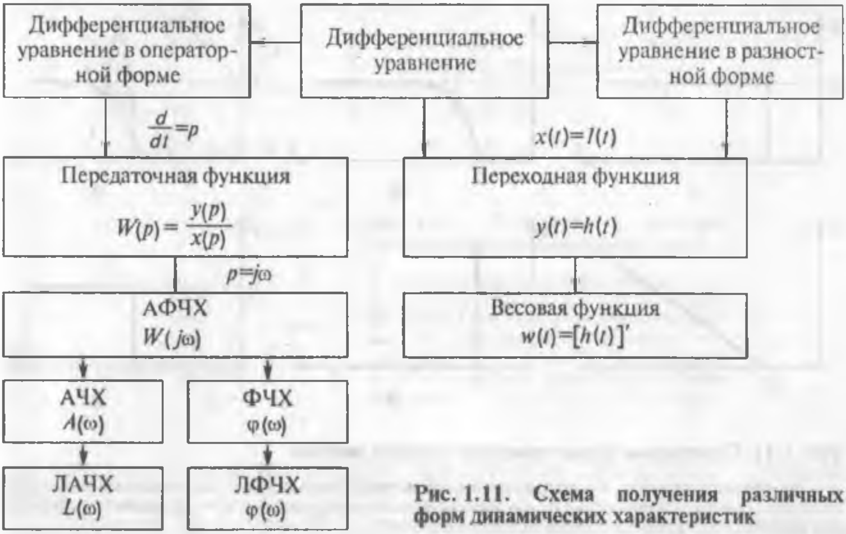

Рис. 1.11. Схема получения различных форм динамических характеристик

ченные при воздействии на элемент (систему) единичной импульсной функцией, а также логарифмические частотные характеристики.

Основная форма представления динамической характеристики — дифференциальное уравнение звена. Все формы однозначно связаны между собой, могут быть получены одна из другой и использованы для определения качества работы автоматических систем управления. Схема получения различных форм динамических характеристик на основе дифференциального уравнения звена представлена на рисунке 1.11.

Динамические звенья — это элементы автоматической системы, рассматриваемые с учетом их динамических характеристик. Под звеном САУ понимается искусственно выделяемая ее часть, необязательно конструктивно или схемно оформленная, но соответствующая элементарному алгоритму — дифференциальному уравнению не выше второго порядка. Различают следующие типовые динамические звенья: пропорциональное, апериодическое первого и второго порядков, идеальные интегрирующее и дифференцирующее, а также звено транспортного запаздывания.

Типовые звенья служат основой для построения любых других звеньев и систем автоматического управления. На схемах эти звенья изображают в виде прямоугольников, внутри которых записывают передаточную функцию, соответствующую данному звену. Типовые звенья можно рассматривать как своеобразные