Дата проведения 10.10.20.

1 пара

Группа 21то

Срок сдачи: следующая пара по расписанию

Задание: законспектировать, подготовиться к практической работе

**Комплексные числа**

Свойства комплексных чисел и функций нашли широкое применение для решения многих практических задач в различных областях математики, физики и техники: в [обработке сигналов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D0%B3%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%BE%D0%B2), [теории управления](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%83%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F), [электромагнетизме](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%B3%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%B7%D0%BC), [теории колебаний](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9), [теории упругости](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%83%D0%BF%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8) и многих других. Преобразования комплексной плоскости оказались полезны в [картографии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D1%8F) и [гидродинамике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0). Современная физика полагается на описание мира с помощью [квантовой механики](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0), которая опирается на арифметику комплексных чисел.

***Комплексное число*** — это выражение вида ***a* + *bi***, где *a*, *b* — действительные числа, а *i* — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен –1, то есть ***i*2 = –1**. Число *a* называется *действительной частью*, а число *b* — *мнимой частью* комплексного числа *z* = *a* + *bi*. Если *b* = 0, то вместо *a* + 0*i* пишут просто *a*. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга.

## Формы

Так сложилось в математике, что у данных чисел несколько форм. Число одно и тоже, но записать его можно по-разному:

1. Алгебраическая:  z =*a*+*ib*
2. Показательная:  *z*=
3. Тригонометрическая : *z*=∣*z*∣⋅(cos(*φ*)+*i*sin(*φ*))

 **Сложение и вычитание** происходят по правилу

 (*a* + *bi*) ± (*c* + *di*) = (*a* ± *c*) + (*b* ± *d*)*i*,

 **Умножение** — по правилу (*a* + *bi*) · (*c* + *di*) = (*ac* – *bd*) + (*ad* + *bc*)*i* (здесь как раз используется, что *i*2 = –1).

 Число  = *a* – *bi* называется *комплексно-сопряженным* к *z* = *a* + *bi*. Равенство *z* ·  = *a*2 + *b*2 позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

.

**Примеры:**

Даны числа и

1. + = (

2. - = (

3. = (

4. : === =

**Геометрическое изображение комплексных чисел**

****

У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число *z* = *a* + *bi* можно изображать вектором с координатами (*a*; *b*) на декартовой плоскости (или, что почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами (*a*; *b*) равна . Эта величина называется ***модулем*** комплексного числа *z* = *a* + *bi* и обозначается **|*z*|.** Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется ***аргументом*** комплексного числа *z* и обозначается **Arg *z***. Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной 2*π* радиан (или 360°, если считать в градусах) — ведь ясно, что поворот на такой угол вокруг начала координат не изменит вектор. Но если вектор длины *r* образует угол *φ* с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны (*r* · cos *φ*; *r* · sin *φ*).

**Тригонометрическая форма записи комплексного числа**

***z* = |*z*| · (cos(Arg *z*) + *i* sin(Arg *z*)) или *z* = r · (cos + *i*sin)**

Часто бывает удобно записывать комплексные числа именно в такой форме, потому что это сильно упрощает выкладки.

 **Умножение комплексных чисел**

***z*1 · *z*2 = · (cos+ ) + *i* sin( + ))**

(при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются).

**Возведение в степень**

Отсюда следуют ***формулы Муавра***:

 *zn* = r*n* · (cos(*n* · ) + *i* sin(*n* ·  )).

 С помощью этих формул легко научиться извлекать корни любой степени  из комплексных чисел.

 *Корень n-й степени из числа z* — это такое комплексное число *w*, что *wn* = *z*. Видно, что , а , где *k* может принимать любое значение из множества {0, 1, ..., *n* – 1}. Это означает, что всегда есть ровно *n* корней *n*-й степени из комплексного числа (на плоскости они располагаются в вершинах правильного *n*-угольника).

**Перевод из алгебраической формы в тригонометрическую**

 z = a + bi = r(cos φ + i sin φ).

Теперь о том, как перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

Поэтому можем легко найти косинус и синус аргумента комплексного числа:

Модуль комплексного числа :

**Пример:**

Записать число **z = 4 -4i** в тригонометрической форме

1. найти модуль комплексного числа:

2. найти тангенс вспомогательного числа : =

3.

|  |
| --- |
| **если** **если** **если** **если**  |

так как

то есть

**z = 4 i = 8(cos + i sin ).**

**Действия с комплексными числами в тригонометрической форме**

Операции умножения, возведения в степень, деления и умножения корней из комплексных чисел удобнее проводить в тригонометрической форме

Пусть ***z1* = r1 · (cos + *i* sin)**

***z2* = r2 · (cos + *i* sin)**

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

***z*1 · *z*2 = · (cos+ ) + *i* sin( + ))**

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

**= · (cos- ) + *i* sin( - ))**

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

***zn* = r*n* · (cos(*n* · ) + *i* sin(*n* ·  ))**  ***формула Муавра***

Извлечение корня комплексных чисел в тригонометрической форме

= (*n* - 1).

Следовательно, комплексное число имеет ***n*** корней. Точки изображающие все корни, являются вершинами ***n***-угольника.

**Действия над комплексными числами в показательной форме**

Пусть

Умножение комплексных чисел в показательной форме

***z*1 · *z*2 = ·**

Деление комплексных чисел в показательной форме

**= ·**

Возведение в степень комплексных чисел в показательной форме

***zn* = r*n***

Извлечение корня комплексных чисел в показательной форме

 **,** *k = 0,1,…,(n-1)*