Дата проведения 10.10.20.

1 пара

Группа 21а

Срок сдачи: следующая пара по расписанию

Задание: законспектировать, подготовиться к практической работе, решить уравнения(смотрите после лекции).

 **Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

Уравнение $y^{''}+py^{'}+qy=f(x)$ **(\*)**

где $p=p(x)$**,** $q=q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функция в интервале $(a, b)$  называется неоднородным линейным дифференциальным уравнение второго порядка, функции $p и q$   – его коэффициентами. Если $f(x)$**=0**  в этом интервале, то уравнение принимает вид:

$y^{''}+py^{'}+qy=0$ **(\*\*)**

и называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.  Если уравнение (\*\*) имеет те же коэффициенты  и , как уравнение (\*), то оно называется однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (\*).

## **Однородные дифференциальные линейные уравнения второго порядка**

Пусть в линейном уравнении

$$y^{''}+py^{'}+qy=0$$

$p$ и$ q$  - постоянные действительные числа.

Частное решение уравнения будем искать в виде функции $y=e^{kx}$ , где  ***k*** – действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя по ***x*** , получаем:

$$y^{'}=ke^{kx}, y^{''}=k^{2}e^{kx}$$

Подставляя в исходное дифуравнение, получаем:

$$e^{kx}\left(k^{2}+pk+q\right)=0$$

Отсюда, учитывая, что $e^{kx}\ne 0$, имеем: $k^{2}+pk+q=0$

Это уравнение называется характеристическим уравнением однородного линейного дифуравнения. Характеристическое уравнение и дает возможность найти $k$. Это уравнение второй степени, поэтому имеет два корня. Обозначим их через $k\_{1}$ и $k\_{2}$. Возможны три случая:

**1 случай**:

 Корни действительные и разные $k\_{1}$**≠**$k\_{2}$.  В этом случае общее решение уравнения: $y=C\_{1}e^{k\_{1}x}+C\_{2}e^{k\_{2}x}$

**Пример 1**

$$y^{''}-7y^{'}+10y=0$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^{2}-7k+10=0$

Решение характеристического уравнения: $k\_{1}=2;$$k\_{2}=5$

Общее решение исходного дифуравнения: $y=C\_{1}e^{2x}+C\_{2}e^{5x}$

**2 случай**:

Корни действительные и равные ($k\_{1}$**=** $k\_{2}=k$)

 В этом случае общее решение уравнения:

$$y=e^{kx}(C\_{1}+C\_{2}x)$$

**Пример 2**

$$y^{''}+6y^{'}+9y=0$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^{2}+6k+9=0$

Решение характеристического уравнения: $k\_{1}=k\_{2}=-3$

Общее решение исходного дифуравнения: $y=e^{-3x}(C\_{1}+C\_{2}x)$

**3 случай**:

Корни комплексные $ $ $k\_{1}=a+bi; k\_{2}=a-bi$.

 В этом случае общее решение уравнения:

$$y=e^{ax}(C\_{1}\cos(bx) +C\_{2}\sin(bx) )$$

**Пример 3**

$$y^{''}-4y^{'}+13y=0$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^{2}-4k+13=0$

Решение характеристического уравнения: $k\_{1}=2+3i; k\_{2}=2-3i$**.**

Общее решение исходного дифуравнения:

$$y=e^{2x}(C\_{1}\cos(3x) +C\_{2}\sin(3x) )$$



**Практика**

Решить уравнения:

$$y^{''}+y^{'}-6y=0$$

$$y^{''}-8y^{'}+16y=0$$

$$y^{''}-2y^{'}+5y=0$$