Дата проведения 12.11.20.

3,4 пара

Группа 21то

Срок сдачи: 14.11.20

**Локальная теорема Лапласа**

Если вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image014_0000.gif появления случайного события http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image008_0001.gif в каждом испытании постоянна, то вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image034.gif того, что в http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image006_0000.gif испытаниях событие http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image008_0002.gif наступит ровно http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image010_0000.gif раз, приближённо равна:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image038.gif , где http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image040.gif.

При этом, чем больше http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image006_0001.gif, тем рассчитанная вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image034_0000.gif будет лучше приближать точное значению http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image043.gif, полученное *(хотя бы гипотетически)* по формуле Бернулли. Рекомендуемое минимальное количество  испытаний – примерно 50-100, в противном случае результат http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image034_0001.gif может оказаться далёким от истины. Кроме того, локальная теорема Лапласа работает тем лучше, чем вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image014_0001.gif ближе к 0,5, и наоборот – даёт существенную погрешность при значениях http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image014_0002.gif, близких к нулю либо единице. По этой причине ещё одним критерием эффективного использования формулы http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image045.gif является выполнение неравенства http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image047.gif *(*http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image049.gif*)*.

Так, например, если http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image051.gif, то http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image053.gif и применение теоремы Лапласа для 50 испытаний оправдано. Но если http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image055.gif и http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image057.gif, то http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image059.gif и приближение http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image034_0002.gif *(к точному значению http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image043_0000.gif)* будет плохим.

О том, почему http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image061.gif и об особенной функции http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image063.gif  мы поговорим на уроке о [нормальном распределении вероятностей](http://www.mathprofi.ru/normalnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html), а пока нам потребуется формально-вычислительная сторона вопроса. В частности, важным фактом является [чётность](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)этой функции: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image065.gif.

Оформим официальные отношения с нашим примером:

Задача 1

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

а) 200 раз;  
б) 225 раз.

С чего начать **решение**? Сначала распишем известные величины, чтобы они были перед глазами:

http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image018_0000.gif – общее количество независимых испытаний;  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image022_0000.gif – вероятность выпадения орла в каждом броске;  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image024_0000.gif – вероятность выпадения решки.

а) Найдём вероятность того, что в серии из 400 бросков орёл выпадет ровно http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image020_0000.gif раз. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Лапласа: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image045_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image068.gif.

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image070.gif  
  
Далее находим соответствующее значение функции: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image072.gif. Это можно сделать несколькими способами. В первую очередь, конечно же, напрашиваются непосредственные вычисления:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image074.gif

На заключительном этапе применим формулу http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image045_0001.gif:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image078.gif – вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет ровно 200 раз.

Как видите, полученный результат очень близок к точному значению http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image028_0000.gif, вычисленному по [формуле Бернулли](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html).

б) Найдём вероятность того, что в серии из 400 испытаний орёл выпадет ровно http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image081.gif раз. Используем локальную теорему Лапласа. Раз, два, три – и готово:

http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image083.gif

http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image085.gif

http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image087.gif – искомая вероятность.

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image089.gif

Следующий пример, как многие догадались, посвящён деторождению – и это вам для самостоятельного решения :)

Задача для самостоятельного решения

Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек.

**Интегральная теорема Лапласа**

Если вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image014_0003.gif появления случайного события http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image008_0003.gif в каждом испытании постоянна, то вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image103.gif того, что в http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image006_0002.gif испытаниях событие http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image008_0004.gif наступит **не менее http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image105.gif и не более http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image107.gif раз** *(от http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image105_0000.gif до http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image107_0000.gif раз включительно)*, приближённо равна:

http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image110.gif, где http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image112.gif

При этом количество испытаний, разумеется, тоже должно быть достаточно большим и вероятность http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image014_0004.gif не слишком мала/велика *(ориентировочно http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image047_0000.gif)*, иначе приближение будет неважным либо плохим.

Функция http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image115.gifназывается[*функцией Лапласа*](http://www.mathprofi.ru/normalnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html), и её значения опять же сведены в стандартную таблицу . На практике наиболее часто встречаются следующие значения:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image117.gif – перепишите к себе в тетрадь.  
Начиная с http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image119.gif, можно считать, что http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image121.gif, или, если записать строже: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image123.gif

Кроме того, функция Лапласа [нечётна](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html): http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image125.gif, и данное свойство активно эксплуатируется в задачах, которые нас уже заждались:

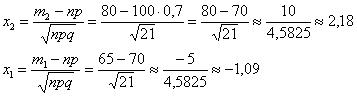
Задача 3

Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

**Решение**: в данной задаче речь идёт о [повторных независимых испытаниях](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html), причём их количество достаточно велико. По условию требуется найти вероятность того, что мишень будет поражена не менее 65, но и не более 80 раз, а значит, нужно использовать интегральную теорему Лапласа: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image127.gif, где http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image112_0000.gif

Для удобства перепишем исходные данные в столбик:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image129.gif – всего выстрелов;  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image131.gif – минимальное число попаданий;  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image133.gif – максимальное число попаданий;  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image135.gif – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image137.gif – вероятность промаха при каждом выстреле.

http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image139.gif, следовательно, теорема Лапласа даст хорошее приближение.

Вычислим значения аргументов:  
  
Обращаю ваше внимание, что произведение http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image143.gif вовсе не обязано нацело извлекаться из-под корня *(как любят «подгонять» числа авторы задач)* – без тени сомнения извлекаем корень и округляем результат; я привык оставлять 4 знака после запятой. А вот полученные значения http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image145.gif обычно округляют до 2 знаков после запятой – эта традиция идёт из *таблицы значений функции http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image115_0000.gif*, где аргументы представлены именно в таком виде.

Используем указанную выше таблицу .В качестве письменного комментария советую поставить следующую фразу: *значения функции http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image115_0001.gif найдём по соответствующей таблице*:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image148.gif  
– вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

**Обязательно пользуемся нечётностью функции!** На всякий случай распишу подробно:  
http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image150.gif  
Дело в том, что *таблица значений функции http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image115_0002.gif* содержит только положительные «икс», а мы работаем *(по крайне мере, по «легенде»)*с таблицей!

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/n/lokalnaja_i_integralnaja_teoremy_laplasa_clip_image152.gif

Ссылки на электронно-образовательный ресурс (ролик, конспект, литературу - автор и название учебника, сайт, персональный сайт и т.п.)

Литература: Алимов Ш.А. и др. «Алгебра и начала анализа» М, 2016 г.

Для отчетности студента:

адрес электронной почты: [gelyusa.galimova@mail.ru](mailto:gelyusa.galimova@mail.ru)

срок сдачи: 14.11.2020