Дата проведения 12.11.20.

3,4 пара

Группа 21то

Срок сдачи: 14.11.20

**Локальная теорема Лапласа**

Если вероятность  появления случайного события  в каждом испытании постоянна, то вероятность  того, что в  испытаниях событие  наступит ровно  раз, приближённо равна:
 , где .

При этом, чем больше , тем рассчитанная вероятность  будет лучше приближать точное значению , полученное *(хотя бы гипотетически)* по формуле Бернулли. Рекомендуемое минимальное количество  испытаний – примерно 50-100, в противном случае результат  может оказаться далёким от истины. Кроме того, локальная теорема Лапласа работает тем лучше, чем вероятность  ближе к 0,5, и наоборот – даёт существенную погрешность при значениях , близких к нулю либо единице. По этой причине ещё одним критерием эффективного использования формулы  является выполнение неравенства  *(**)*.

Так, например, если , то  и применение теоремы Лапласа для 50 испытаний оправдано. Но если  и , то  и приближение  *(к точному значению )* будет плохим.

О том, почему  и об особенной функции   мы поговорим на уроке о [нормальном распределении вероятностей](http://www.mathprofi.ru/normalnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html), а пока нам потребуется формально-вычислительная сторона вопроса. В частности, важным фактом является [чётность](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)этой функции: .

Оформим официальные отношения с нашим примером:

Задача 1

Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

а) 200 раз;
б) 225 раз.

С чего начать **решение**? Сначала распишем известные величины, чтобы они были перед глазами:

 – общее количество независимых испытаний;
 – вероятность выпадения орла в каждом броске;
 – вероятность выпадения решки.

а) Найдём вероятность того, что в серии из 400 бросков орёл выпадет ровно  раз. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Лапласа: , где .

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:


Далее находим соответствующее значение функции: . Это можно сделать несколькими способами. В первую очередь, конечно же, напрашиваются непосредственные вычисления:


На заключительном этапе применим формулу :
 – вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет ровно 200 раз.

Как видите, полученный результат очень близок к точному значению , вычисленному по [формуле Бернулли](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html).

б) Найдём вероятность того, что в серии из 400 испытаний орёл выпадет ровно  раз. Используем локальную теорему Лапласа. Раз, два, три – и готово:





 – искомая вероятность.

**Ответ**: 

Следующий пример, как многие догадались, посвящён деторождению – и это вам для самостоятельного решения :)

Задача для самостоятельного решения

Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек.

**Интегральная теорема Лапласа**

Если вероятность  появления случайного события  в каждом испытании постоянна, то вероятность  того, что в  испытаниях событие  наступит **не менее  и не более  раз** *(от  до  раз включительно)*, приближённо равна:

, где 

При этом количество испытаний, разумеется, тоже должно быть достаточно большим и вероятность  не слишком мала/велика *(ориентировочно )*, иначе приближение будет неважным либо плохим.

Функция называется[*функцией Лапласа*](http://www.mathprofi.ru/normalnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html), и её значения опять же сведены в стандартную таблицу . На практике наиболее часто встречаются следующие значения:
 – перепишите к себе в тетрадь.
Начиная с , можно считать, что , или, если записать строже: 

Кроме того, функция Лапласа [нечётна](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html): , и данное свойство активно эксплуатируется в задачах, которые нас уже заждались:

Задача 3

Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

**Решение**: в данной задаче речь идёт о [повторных независимых испытаниях](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html), причём их количество достаточно велико. По условию требуется найти вероятность того, что мишень будет поражена не менее 65, но и не более 80 раз, а значит, нужно использовать интегральную теорему Лапласа: , где 

Для удобства перепишем исходные данные в столбик:
 – всего выстрелов;
 – минимальное число попаданий;
 – максимальное число попаданий;
 – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;
 – вероятность промаха при каждом выстреле.

, следовательно, теорема Лапласа даст хорошее приближение.

Вычислим значения аргументов:

Обращаю ваше внимание, что произведение  вовсе не обязано нацело извлекаться из-под корня *(как любят «подгонять» числа авторы задач)* – без тени сомнения извлекаем корень и округляем результат; я привык оставлять 4 знака после запятой. А вот полученные значения  обычно округляют до 2 знаков после запятой – эта традиция идёт из *таблицы значений функции *, где аргументы представлены именно в таком виде.

Используем указанную выше таблицу .В качестве письменного комментария советую поставить следующую фразу: *значения функции  найдём по соответствующей таблице*:

– вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

**Обязательно пользуемся нечётностью функции!** На всякий случай распишу подробно:

Дело в том, что *таблица значений функции * содержит только положительные «икс», а мы работаем *(по крайне мере, по «легенде»)*с таблицей!

**Ответ**: 

Ссылки на электронно-образовательный ресурс (ролик, конспект, литературу - автор и название учебника, сайт, персональный сайт и т.п.)

Литература: Алимов Ш.А. и др. «Алгебра и начала анализа» М, 2016 г.

 Для отчетности студента:

адрес электронной почты: gelyusa.galimova@mail.ru

 срок сдачи: 14.11.2020